Английский язык

Библиотека в школе

Биология

География

Дошкольное образование

Здоровье детей

Математика

№3/2005

Информатика

Искусство

История

Литература

Начальная школа

Немецкий язык

Русский язык

Спорт в школе

Управление школой

Физика

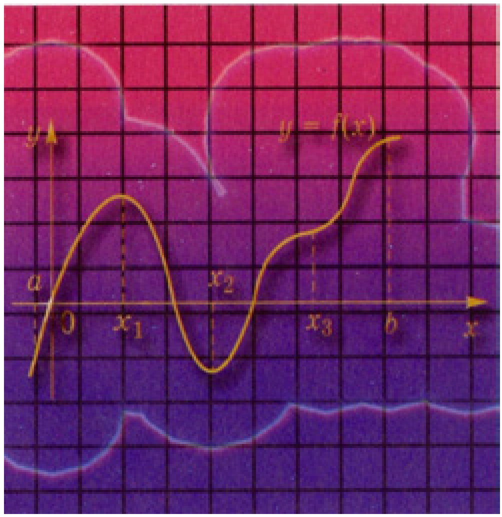
Французский язык

Химия

Школьный психолог

Библиотечка «Первого сентября»

В. ЛИСИЧКИН



Исследование функций с помощью производной

БИБЛИОТЕЧКА «ПЕРВОГО СЕНТЯБРЯ»
Серия «Математика»
Выпуск 3

В. Лисичкин

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Москва
Чистые пруды
2005

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Понятие производной — одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая ее механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, более точное построение их графиков, нахождение их наибольших и наименьших значений и т.д.

Познакомимся с основными идеями, связанными с исследованиями функций. Для этого рассмотрим график какой-нибудь функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 1).

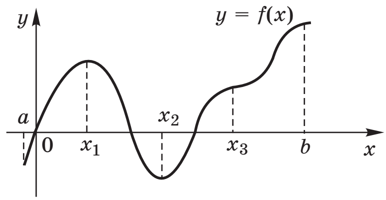


Рис. 1

Интуитивно ясно, что на промежутках $[a; x_1]$ и $[x_2; b]$ данная функция возрастает, а на промежутке $[x_1; x_2]$ — убывает.

В дальнейшем будем рассматривать только дифференцируемые функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если в точках этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Согласно определению возрастающей на некотором промежутке функции имеем:

если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$;
если $x_2 < x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Отсюда следует, что если $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$,
если $x_2 - x_1 < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Так как разности, стоящие в левых частях полученных неравенств, являются приращениями аргумента и функции, то приходим к заключению, что если $\Delta x > 0$, то $\Delta y > 0$, а если $\Delta x < 0$, то и $\Delta y < 0$. Иными словами, приращения Δx и Δy имеют одинаковые знаки.

Тогда отношение приращения функции к приращению аргумента положительно, то есть $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Далее, поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на рассматриваемом промежутке, то, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, а это значит, что $f'(x) > 0$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что в случае убывания функции ее производная отрицательна, то есть $f'(x) < 0$.

Все вышеизложенное можно сформулировать как необходимый признак возрастания (убывания) функции.

■ **Теорема 1.** *Если дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *на данном промежутке, то производная этой функции не отрицательна* (*не положительна*) *на этом промежутке.*

Геометрически утверждение теоремы означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы α с положительным направлением оси Ox, причем в отдельных точках, вроде точки M (рис. 2), касательная может быть параллельна оси Ox; значит, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \geq 0$. Аналогично, касательные к графику убывающей функции образуют тупые углы α с положительным направлением оси Ox, причем в отдельных точках, вроде точки N (рис. 3), касательная может быть параллельна оси Ox; поэтому $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \leq 0$.

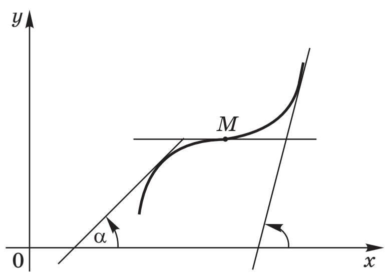


Рис. 2

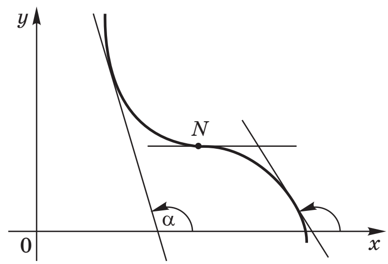


Рис. 3

Промежутки, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *промежутками монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих промежутках.

Например, функция $y = \sin x$ (рис. 4) не монотонна на промежутке $0 < x < 2\pi$, но является монотонной на промежутке

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ (во всех точках этого промежутка функция убывает).

Обратное заключение также справедливо, оно выражается следующей теоремой.

■ **Теорема 2.** *Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) на некотором промежутке, то функция на этом промежутке монотонно возрастает (монотонно убывает).*

Поясним эту теорему геометрически. Имеем $f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$, где k — коэффициент касательной. Если $f'(x) > 0$, то $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то есть угол α — острый, а это возможно лишь при возрастании функции (рис. 5).

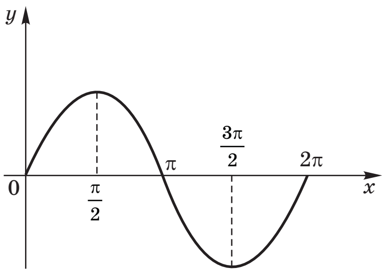


Рис. 4

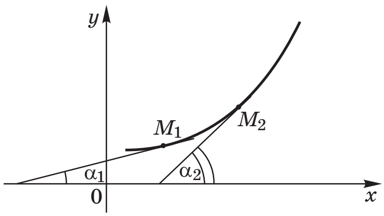


Рис. 5

Если же $f'(x) < 0$, то $\operatorname{tg} \alpha < 0$, то есть угол α — тупой, что возможно лишь при убывании функции (рис. 6).

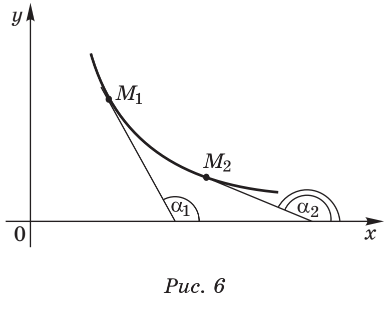


Рис. 6

Таким образом, возрастание или убывание функции на промежутке вполне определяется знаком производной этой функции. На промежутке знакопостоянства производной функция является монотонной.

1. Покажите, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает на промежутке $(-2; 1)$.

Решение. Достаточно убедиться в том, что производная функции при $-2 < x < 1$ отрицательна. Находим

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1).$$

Множитель $x + 2$ на промежутке $(-2; 1)$ положителен, а множитель $x - 1$ отрицателен. Значит, производная во всех точках указанного промежутка отрицательна, а следовательно, функция убывает.

2. Покажите, что функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ монотонно возрастает.

Решение. Находим производную $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. В указанном промежутке $\cos x$ изменяется от 0 до 1; поэтому

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Следовательно, данная функция является возрастающей.

3. Исследуйте поведение функции $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ на промежутке $[1; 4]$.

Решение. Находим производную: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. При любом значении x из промежутка $[1; 4]$ производная положительна. Отсюда заключаем, что данная функция возрастает на промежутке $[1; 4]$.

Упражнения

4. Покажите, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает на промежутке $(0; 1)$ и убывает на промежутке $(1; 2)$.

5. Покажите, что функция $y = x^3 + x$ возрастает на области определения.

6. Покажите, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ убывает на области определения.

7. Покажите, что функция $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ возрастает на промежутке, не содержащем точки $x = 0$.

Мы установили, что промежутки возрастания или убывания функции совпадают с промежутками, в которых производная этой функции сохраняет знак. Следовательно, переход от возрастания к убыванию или обратно возможен лишь в точках, где производная меняет знак. Такими точками могут служить только точки, в которых $f'(x) = 0$, а также точки разрыва.

Поэтому промежутки области монотонности мы получим, если разделим область определения функции точками, в которых $f'(x) = 0$, и точками разрыва.

Сформулируем теперь *правило* нахождения промежутков монотонности функции $f(x)$.

1. Находят точки разрыва функции $f(x)$.
2. Находят производную $f'(x)$ данной функции.
3. Находят точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$.
4. Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбить на промежутки, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти промежутки являются промежутками монотонности.
5. Исследуют знак $f'(x)$ на каждом из найденных промежутков. Если на рассматриваемом промежутке $f'(x) > 0$, то на этом промежутке $f(x)$ возрастает; если же $f'(x) < 0$, то на таком промежутке $f(x)$ убывает.

8–28. Найдите промежутки монотонности следующих функций.

8. $y = x^2 - 4x + 1$.

Решение. 1. Находим производную данной функции: $y' = 2x - 4$.

2. Находим критические точки функции:

$$2x - 4 = 0,\ 2x = 4,\ x = 2.$$

3. Область определения функции $(-\infty;\ +\infty)$ разбивается на промежутки $(-\infty;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$.

4. На промежутке $(-\infty;\ 2)$ имеем $y' < 0$; например,

$$(2x - 4)\big|_{x=0} = -4.$$

Следовательно, на промежутке $(-\infty;\ 2)$ функция убывает. На промежутке $(2;\ +\infty)$ имеем $y' > 0$; например, $(2x - 4)\big|_{x=3} = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. Значит, на промежутке $(2;\ +\infty)$ функция возрастает (рис. 7).

9. $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение. 1. Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2. Находим критические точки:

$$3x^2 - 6x = 0,\ 3x(x - 2) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

3. Область определения функции $(-\infty; +\infty)$ разбивается на промежутки $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$.

4. Имеем:

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 9 > 0$, следовательно, на промежутке $(-\infty; 0)$ функция возрастает;

$f'(1) = 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 = -3 < 0$, значит, на промежутке $(0; 2)$ функция убывает;

$f'(3) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 9 > 0$, поэтому на промежутке $(2; +\infty)$ функция возрастает (рис. 8).

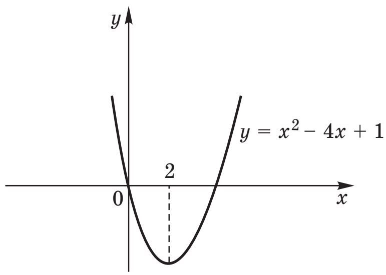


Рис. 7

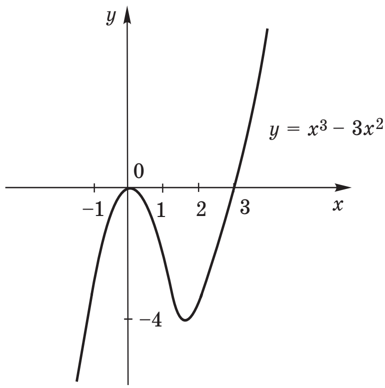


Рис. 8

10. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

11. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2\cos x}.$$

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $x < \operatorname{tg} x$, $x^2\cos x > 0$, значит, $f'(x) < 0$.

Отсюда следует, что $f(x)$ убывает на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

12. $y = x\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Решение. Так как $y = x\left(1+\sqrt{x}\right) = x + x^{\frac{3}{2}}$, то $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Область определения данной функции — промежуток $[0; +\infty)$. Так как производная положительна в этом промежутке, то функция возрастает во всей области определения.

13. $y = x - 2\sin x$, если $0 \le x \le 2\pi$.

Решение. 1. Имеем $y' = 1 - 2\cos x$.

2. Находим критические точки: $1 - 2\cos x = 0$, $2\cos x = 1$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ (для данного условия).

3. Указанная область исследования $[0; 2\pi]$ разбивается на промежутки $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.

4. Находим

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0,$$

следовательно, в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$ функция убывает;

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2\cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1 > 0,$$

значит, в промежутке $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ функция возрастает;

$$y'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 1 - 2\cos\frac{11\pi}{6} = 1 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} < 0,$$

поэтому в промежутке $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ функция убывает.

14. $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Решение. 1. Функция существует только при $x > 0$. Находим производную:

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}.$$

2. Производная равна нулю в точке $x_1 = \frac{1}{2}$, ($x_2 = -\frac{1}{2}$ — посторонний корень).

3. Область определения функции $(0; +\infty)$ разобьем на два промежутка $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

4. На промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ производная отрицательна, а на промежутке $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — положительна. Следовательно, рассматриваемая функция убывает на промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и возрастает на промежутке $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Упражнения

15. $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$.

16. $\varphi(x) = 1 - x^3$.

17. $y = x^5 - 5x$.

18. $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

19. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$.

20. $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$.

21. $y = \ln x$.

22. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

23. $y = \sin x$.

24. $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$.

25. $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

26. $f(x) = x + \cos x$.

27. $y = 2x + \sin x$.

28. $y = x + \frac{1}{x}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

На рисунке 8 изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим окрестность точки $x = 0$, то есть некоторый промежуток, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимается в точке $x = 0$. Например, на промежутке $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное нулю, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют *точкой максимума* (от лат. *maximum* — наибольший) этой функции.

Аналогично, точку $x = 2$ называют *точкой минимума* (от лат. *minimum* — наименьший) функции $y = x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше, чем ее значение в остальных точках некоторой окрестности точки $x = 2$.

Определение 2. Точка $x = a$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если имеет место неравенство $f(a) > f(x)$ (соответственно $f(a) < f(x)$) для любого x из некоторой окрестности точки $x = a$.

Если $x = a$ — точка максимума (минимума) функции $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $x = a$.

Максимум и минимум функции объединяют названием *экстремум* функции, а точки максимума и минимума называют *точками экстремума* (*экстремальными точками*).

Не следует считать, что максимум функции является наибольшим значением во всей области определения этой функции; он является наибольшим лишь по сравнению со значениями функции, взятыми в некоторой окрестности точки максимума.

На данном промежутке функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов, причем некоторые из максимумов могут быть меньше некоторых минимумов.

Из рисунка 9 видно, что значение $f(x_1)$, представляющее собой максимум функции $f(x)$, не является наибольшим значением этой функции на промежутке $(a; b)$ и, более того, $f(x_1)$ меньше, чем значение $f(x_2)$, являющееся минимумом данной функции.

Аналогично, минимум функции не обязательно является наименьшим значением данной функции.

Определим, при каких условиях функция имеет максимум или минимум.

■ **Теорема 3** (необходимый признак экстремума). *Если $x = a$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и производная в этой точке существует, то она равна нулю*: $f'(a) = 0$.

Доказательство. Производная функции $f(x)$ в точке $x = a$ не может быть отличной от нуля, так как в случае $f'(a) > 0$ функция $f(x)$ возрастала бы на некотором промежутке, содержащем точку a, а в случае $f'(a) < 0$ — убывала бы на некотором промежутке, содержащем точку a; другими словами, при $f'(a) > 0$ и $f'(a) < 0$ функция не имеет экстремума в точке a, что противоречит условию. Значит, $f'(a) = 0$.

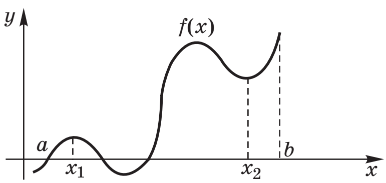


Рис. 9

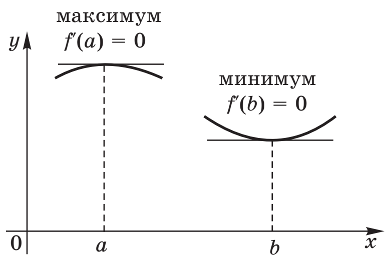


Рис. 10

Геометрически необходимый признак экстремума означает, что *если $x = a$ — точка экстремума функции $y = f(x)$, то касательная* (в том случае, когда она существует) *к графику этой функции в точке* $(a; f(a))$ *параллельна оси Ox* (рис. 10).

Легко убедиться в том, что необходимое условие экстремума функции не является достаточным, то есть из того факта, что $f'(a) = 0$, вовсе не следует, что функция $f(x)$ имеет экстремум при $x = a$. Например, для функции, изображенной на рисунке 11, касательная MT параллельна оси Ox, то есть $f'(a) = 0$, однако экстремума в этой точке функция не имеет.

Таким образом, обращение производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием экстремума.

■ **Теорема 4** (достаточный признак экстремума). *Если производная $f'(x)$ при переходе x через a меняет знак, то a является точкой экстремума функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть при переходе x через a производная меняет знак с плюса на минус. Тогда слева от a производная положительна и, следовательно, здесь находится промежуток возрастания функции. Справа же от a производная отрицательна, поэтому здесь находится промежуток убывания функции. Точка, отделяющая промежуток возрастания функции от промежутка убывания, есть точка максимума.

Аналогично доказывается, что если при переходе x через a производная меняет знак с минуса на плюс, то a является точкой минимума.

Смысл теоремы 4 наглядно иллюстрирует рисунок 12. Точка a — критическая, так как $f'(a) = 0$. Слева от этой точки, то есть при $x < a$, имеем $f'(x) > 0$; касательная к кривой образует с осью Ox острый угол и функция возрастает.

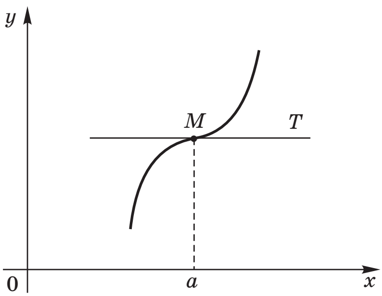


Рис. 11

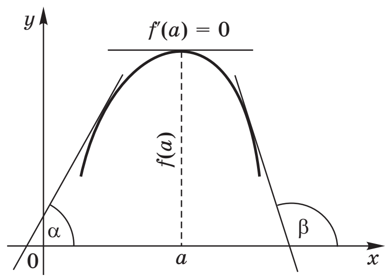


Рис. 12

Справа от этой точки, то есть при $x > a$, имеем $f'(x) < 0$; касательная к кривой образует с осью Ox тупой угол и функция убывает. При $x = a$ функция переходит от возрастания к убыванию, то есть имеет максимум.

Для функции, изображенной на рисунке 11, при переходе через критическую точку $x = a$ производная не меняет знак, и в этой точке нет экстремума.

Таким образом, исследование производной $y' = f'(x)$ позволяет во многом изучить поведение функции $y = f(x)$. При этом нужно понимать, что в своих рассуждениях мы с помощью известного графика функции находили значения производной на тех или иных участках кривой. На практике же, конечно, поступают наоборот: рассматривают производную некоторой функции и с ее помощью исследуют характер функции.

1. Находят производную $f'(x)$.

2. Находят все критические точки из области определения функции.

3. Устанавливают знаки производной функции при переходе через критические точки и выписывают точки экстремума.

4. Вычисляют значения функции $f(x)$ в каждой экстремальной точке.

29–46. Исследуйте на экстремум следующие функции.

29. $y = x^2 + 2$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = (x^2 + 2)' = 2x$.

2. Приравниваем ее к нулю: $2x = 0$, откуда $x = 0$ — критическая точка.

3. Определяем знак производной при значении $x < 0$, например при $x = -1$: $y'_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2$. Определяем знак производной при $x > 0$, например при $x = 1$: $y'_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2$. Так как при переходе через $x = 0$ производная изменяет знак с минуса на плюс, при $x = 0$ функция имеет минимум.

4. Находим минимальное значение функции, то есть

$$f(0) = 0^2 + 2 = 2.$$

Теперь можно на чертеже отобразить вид кривой вблизи точки $A(0;\ 2)$ (рис. 13).

30. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Приравниваем ее к нулю и решаем уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Его корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ — критические точки.

3. Производную можно представить в виде произведения множителей: $y' = (x - 1)(x - 3)$. Исследуем критическую точку $x_1 = 1$, определяя знак y' вблизи этой точки слева и справа от нее. Так как $y'_{x<1} > 0$, $y'_{x>1} < 0$, то при $x_1 = 1$ функция имеет максимум. Аналогично, для точки $x_2 = 3$ получим $y'_{x<3} < 0$, $y'_{x>3} > 0$. Следовательно, при $x_2 = 3$ функция достигает минимума.

4. Находим $y_{x=1} = \frac{7}{3}$, $y_{x=3} = 1$.

График функции изображен на рисунке 14.

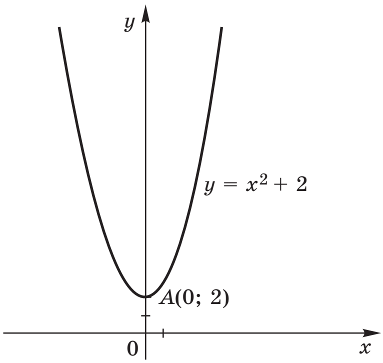


Рис. 13

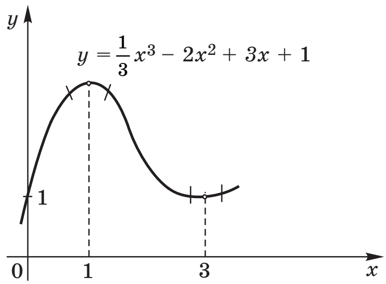


Рис. 14

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 6$.

Решение. Найдем $f'(x) = 3x^2 + 6x + 9 = 3(x^2 + 2x + 3)$. Приравняв производную нулю, видим, что уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$ не имеет действительных корней, а это означает, что непрерывная функция $f(x)$ не имеет ни максимумов, ни минимумов. Действительно, $f'(x) = 3((x + 1)^2 + 2) > 0$ при любом значении x; следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей области определения и не может иметь экстремумов.

32. $y = (x - 5)e^x$.

Решение. 1. $y' = (x - 5)'e^x + (e^x)'(x - 5) = e^x + e^x(x - 5) =$
$= e^x(x - 4)$.

2. $e^x(x - 4) = 0$, $e^x \neq 0$; $x - 4 = 0$, $x = 4$.

3. На промежутке $(-\infty; 4)$ производная отрицательна, а на промежутке $(4; +\infty)$ положительна. Следовательно, при $x = 4$ функция имеет минимум.

4. $f(4) = y_{\min} = -e^4$.

33. $y = 1 - \sqrt[5]{(x-2)^4}$.

Решение. 1. $y' = -\frac{4}{5}\left(x-2\right)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$.

2. Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует лишь при $x = 2$. Это и есть критическая точка.

3. На промежутке $(-\infty; 2)$ производная положительна, на промежутке $(2; +\infty)$ отрицательна; следовательно, при $x = 2$ функция имеет максимум.

4. Находим $f(2) = y_{\max} = 1$.

34. $f(x) = \sin x + \cos x$.

Решение. 1. $f'(x) = \cos x - \sin x$.

2. Решим уравнение $\cos x - \sin x = 0$; разделив обе его части на $\cos x$, получим $1 - \operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, то есть $x = \frac{\pi}{4}$.

3. При $x < \frac{\pi}{4}$, например при $x = 0$, имеем:

$$f'(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1 > 0;$$

при $x > \frac{\pi}{4}$, например при $x = \frac{\pi}{3}$, получим

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Значит, при $x = \frac{\pi}{4}$ функция имеет максимум.

4. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, то есть $\left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$, что соответствует точке максимума.

Замечание. При исследовании функции на экстремум производную $f'(x)$ полезно предварительно разложить на множители: этим упрощается исследование ее знака в окрестности критического значения.

Для оформления записи исследования функции можно пользоваться таблицей, в первой строке которой записаны промежутки знакопостоянства производной и критические точки функции; во второй — знаки первой производной на этих промежутках и ее значения в критических точках; в третьей — поведение функции на этих промежутках и ее значения в критических точках.

35. $y = xe^x$.

Решение. 1. Находим производную:

$$y' = (xe^x)' = x'e^x + (e^x)'x = e^x + xe^x = e^x(1 + x).$$

2. Находим критические точки: $e^x(1 + x) = 0$, $x = -1$.

3. Исследуем знаки производной слева и справа от критической точки:

$$y'(-2) = e^{-2}(1 - 2) = \frac{1}{e^2}\cdot(-1) < 0, \qquad y'(1) = e(1 + 1) = 2e > 0.$$

Следовательно, при $x = -1$ функция имеет минимум

$$y_{\min} = y(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e} = -0{,}369.$$

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	убывает (↘)	$y_{\min} = -\frac{1}{e}$	возрастает (↗)

Упражнения

36. $y = x^2 - x - 6$.

37. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

38. $y = 1 - 6x - x^2$.

39. $y = x^3 - 6x + 1$.

40. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

41. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

42. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

43. $y = (2x + 1)\sqrt[3]{x-2}$.

44. $f(x) = 2^x x^{-2}$.

45. $y = 5^x + 5^{-x}$.

46. Может ли точка экстремума функции быть одновременно и точкой экстремума ее производной?

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. В этом случае, как известно, она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах важно найти те точки отрезка $[a; b]$, которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка $[a; b]$.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, достаточно:

1. Найти все критические точки, принадлежащие $[a; b]$, и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a;\ b]$, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$.

3. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a;\ b]$; аналогично, наименьшее из найденных значений является наименьшим значение функции на этом отрезке.

47. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x$ на отрезке $[-3;\ 4]$.

Решение. 1. Находим критические точки функции на отрезке $[-3;\ 4]$. Имеем $y' = 3x^2 - 6$; решая уравнение $3x^2 - 6 = 0$, получим $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. Эти точки принадлежат данному отрезку.

Вычислим значения функции в критических точках.

$$y\left(-\sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^3 - 6\cdot\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2};$$

$$y\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}.$$

2. Находим значения функции на концах отрезка: $y(-3) = -9$, $y(4) = 40$.

3. Сравнивая значения функции в критических точках и ее значения на концах отрезка, заключаем, что $y = -9$ является наименьшим, а $y = 40$ — наибольшим значением функции на указанном отрезке.

48. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

Решение. 1. Находим критические точки, принадлежащие $\left[-\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right]$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1),\ 6(x^2 - 1) = 0,\quad x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1) + 5 = 9;\quad f(1) = 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1 + 5 = 1.$$

2. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 6\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -11\frac{1}{4};$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6\cdot\frac{3}{2} + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

3. Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1) = 9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -11\frac{1}{4}$ (рис. 15).

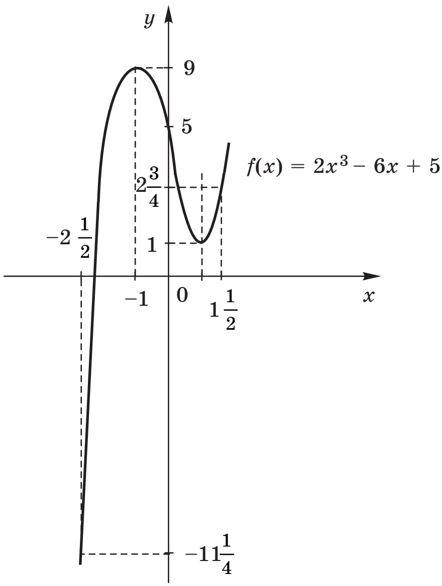


Рис. 15

49. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. 1. Находим критические точки, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$, и значения функции в этих точках:

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2,\ 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0,\ 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0,$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$$

Критическая точка $x_3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

Вычисляем значения функции в двух других критических точках: $y(0) = 3$, $y(1) = 4$.

2. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка: $y(-1) = -8$, $y(2) = -5$.

3. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение функции $y(1) = 4$, наименьшее $y(-1) = -8$.

50. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $[-6; 8]$.

Решение. 1. Находим критические точки на отрезке $[-6; 8]$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

На рассматриваемом отрезке имеем только одну критическую точку $x = 0$; при этом $f(0) = 10$.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-6) = \sqrt{100 - 36} = 8, \quad f(8) = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

3. Обозначая через M наибольшее, а через m — наименьшее значение функции на отрезке, получаем $M = f(0) = 10$, $m = f(8) = 6$; здесь наименьшее значение достигается на конце отрезка.

Замечание. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции можно упростить, если воспользоваться следующими свойствами непрерывных функций:

1) если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и возрастает, то $m = f(a)$ и $M = f(b)$;

2) если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и убывает, то $m = f(b)$ и $M = f(a)$;

3) если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на этом отрезке только одну точку максимума x_0 (и ни одной точки минимума), то наибольшее значение на данном отрезке есть $M = f(x_0)$;

4) если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на этом отрезке только одну точку минимума x_0 (и ни одной точки максимума), то наименьшее значение на данном отрезке есть $m = f(x_0)$.

Упражнения

51–56. Найдите наибольшее значение M и наименьшее значение m следующих функций на указанных отрезках.

51. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на $[0; 3]$.

52. $y = x^2 - 6x + 6$ на $[1; 4]$.

53. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на $[2; 5]$.

54. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на $[-2; 1]$.

55. $f(x) = x \ln x - x$ на $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

56. $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

При построении графиков функций с помощью производных полезно придерживаться такого *плана*:

1. Находят область определения функции.

2. Выясняют, является ли функция четной или нечетной; проверяют ее на периодичность.

3. Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.

4. Находят критические точки функции.

5. Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.

6. Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой. Иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Этот план исследования функции и построения ее графика является примерным, его не всегда надо придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то этого можно не делать; если функция четная, то ее график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции и т.п.

57–63. Исследуйте функцию и постройте ее график.

57. $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Решение. 1. Функция определена на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2. Имеем $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат. Если $y = 0$, то $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$, то есть $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Значит, кривая пересекает ось абсцисс в точках $(-3; 0)$ и $(1; 0)$. Если $x = 0$, то из равенства

$y = x^2 + 2x - 3$ следует $y = -3$, то есть кривая пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

4. Находим критические точки функции. Имеем $y' = 2x + 2$, $2x + 2 = 0$, $2(x + 1) = 0$, $x = -1$.

5. Область определения функции разделится на промежутки $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$. Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка. Так, $f'(-2) = -2 < 0$, $f'(2) = 2 > 0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty; -1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1; +\infty)$ — возрастает. При $x = -1$ функция имеет минимум, равный $f_{\min}(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f_{\min} = -4$	$\nearrow$

6. Отмечаем найденные точки в прямоугольной системе координат и соединяем их плавной линией (рис. 16).

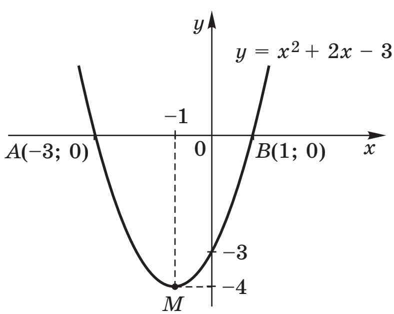


Рис. 16

58. $y = x^3 - 12x + 4$.

Решение. 1. Область определения $(-\infty; +\infty)$. Функция непрерывна на всей области определения.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Если $x = 0$, то $y = 4$, то есть график функции пересекает ось ординат в точке $(0; 4)$.

4. Имеем $y' = 3x^2 - 12$, $3x^2 - 12 = 0$, $3(x + 2)(x - 2) = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ — критические точки функции.

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Ее область определения разделится на промежутки $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. Имеем $y'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 12 = 15 > 0$, $y'(0) = -12 < 0$, $y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0$. Значит, в промежутках $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ функция возрастает, а в промежутке $(-2; 2)$ — убывает. При $x = -2$ функция имеет максимум: $y(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 4 = 20$, а при $x = 2$ — минимум: $y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 4 = -12$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	$y_{\max} = 20$	↘	$y_{\min} = -12$	↗

6. Получившаяся кривая изображена на рисунке 17.

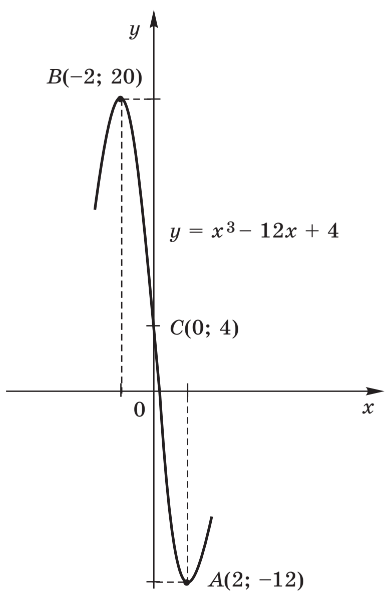


Рис. 17

59. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.

Решение. 1. Область определения функции — промежуток $(-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2. Здесь $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

3. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x = 0$, тогда $y = 0$. Значит, кривая пересекает ось Oy в точке $(0; 0)$.

Чтобы определить точки пересечения графика с осью абсцисс, полагаем $y = 0$:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = 0,\ x^4 - 6x^2 = 0,\ x^2(x^2 - 6) = 0.$$

Отсюда $x^2 = 0$, $x_{1,2} = 0$, то есть две точки пересечения слились в одну точку касания; кривая в точке $(0; 0)$ касается оси Ox. Далее, имеем $x^2 - 6 = 0$, то есть $x_{3,4} = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$.

Итак, в начале координат $O(0; 0)$ кривая пересекает ось Oy и касается оси Ox, а в точках $A(-2{,}45; 0)$ и $B(2{,}45; 0)$ пересекает ось Ox.

4. Найдем критические точки функции:

$$y' = x^3 - 3x,\ x^3 - 3x = 0,\ x(x^2 - 3) = 0,\ x_1 = 0,\ x^2 - 3 = 0,$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}7.$$

Эти точки разбивают область определения функции на промежутки $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$, $\left(0; \sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

5. Составим таблицу:

x	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}; 0\right)$	0	$\left(0; \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$y_{\min} = -2{,}25$	↗	$y_{\max} = 0$	↘	$y_{\min} = -2{,}25$	↗

6. График изображен на рисунке 18.

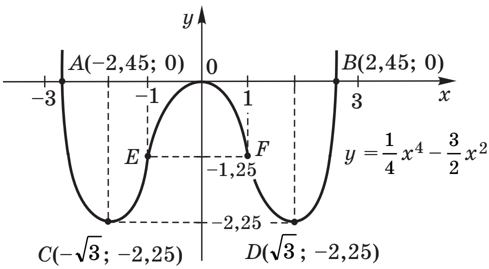


Рис. 18

60. $y = e^{-x^2}$.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

2. Функция четная, так как $f(-x) = f(x)$. Ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Если $x = 0$, то $y = e^0 = 1$, то есть график функции пересекает ось ординат в точке (0; 1).

Ось абсцисс график функции не пересекает, так как равенство $e^{-x^2} = 0$ ни при каких значениях x не выполняется.

4. Найдем критические точки функции. Имеем

$$y' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2x\,e^{-x^2}.$$

Из уравнения $-2x\,e^{-x^2} = 0$ следует, что $x = 0$ — единственная критическая точка.

5. Точка $x = 0$ делит область определения функции на промежутки $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Так как $y'(-1) = -2 \cdot (-1)e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$, $y'(1) = -2 \cdot 1 \cdot e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$, то в промежутке $(-\infty; 0)$ функция возрастает, а в промежутке $(0; +\infty)$ — убывает. При $x = 0$ она имеет максимум, равный 1.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	–
y	↗	$y_{\max} = 1$	↘

6. График изображен на рисунке 19.

61. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Решение. 1. Область определения $(-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет, поскольку $x^2 + 1 > 0$ при любом действительном x.

2. Так как $y(-x) = \ln((-x^2) + 1) = \ln(x^2 + 1) = y(x)$, то функция четная; ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Если $x = 0$, то $y = \ln 1 = 0$, а если $y = 0$, то $\ln(x^2 + 1) = 0$, откуда $x^2 + 1 = 1$, то есть $x = 0$. Это значит, что график функции пересекает оси координат в единственной точке — начале координат.

4. Найдем критические точки функции. Имеем

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2+1}, \quad \frac{2x}{x^2+1} = 0,$$

то есть $x = 0$ — критическая точка.

5. Точка $x = 0$ разбивает область определения функции на два промежутка $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Так как $f'_{x<0} < 0$, $f'_{x>0} > 0$, то в первом из них функция убывает, во втором — возрастает, причем при $x = 0$ она достигает минимума: $y_{\min} = y(0) = 0$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$y_{\min} = 0$	$\nearrow$

6. График изображен на рисунке 20.

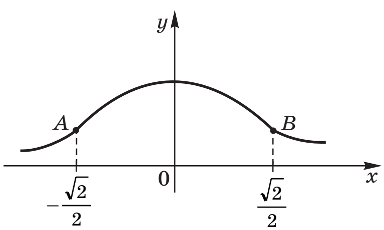


Рис. 19

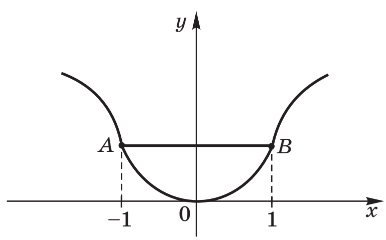


Рис. 20

62. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Решение. 1. Функция определена на всей оси Ox, за исключением точек $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$, в которых функция имеет разрыв.

2. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$. Ее график симметричен относительно начала координат. В связи с этим можно исследовать функцию только для точек справа от оси ординат.

3. Если $x = 0$, то $y = 0$, то есть график функции проходит через начало координат. Других точек пересечения графика с осями координат нет.

4. Находим

$$y' = \frac{\left(x^3\right)'\left(3 - x^2\right) - \left(3 - x^2\right)' x^3}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{3x^2\left(3 - x^2\right) + 2x \cdot x^3}{\left(3 - x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{9x^2 - 3x^4 + 2x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^2}.$$

Из уравнения $x^2(9 - x^2) = 0$ получим (при условии $x \geq 0$) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

5. Производная может менять знак при прохождении через эти точки и через точку разрыва функции $x = \sqrt{3}$, в которой производная не существует.

Так как $x^2 \geq 0$ и $(3 - x^2)^2 \geq 0$, то знак производной определяется знаком разности $9 - x^2$. Поэтому при $0 < x < \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < 3$ имеем $y' > 0$, следовательно, y возрастает в этих промежутках; при $x > 3$ имеем $y' < 0$, значит, y убывает в этом промежутке. Итак, в точке $x = 3$ функция имеет максимум, равный

$$y_{\max} = f(3) = -\frac{9}{2}.$$

Составим таблицу для рассматриваемой части области определения:

x	$\left(0; \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}; 3\right)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	+	0	–
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$y_{\max} = -\dfrac{9}{2}$	$\searrow$

6. График изображен на рисунке 21.

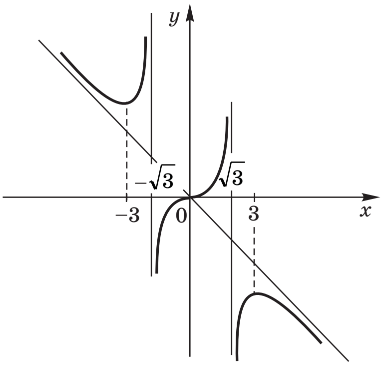


Рис. 21

63. $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

Решение. 1. Область определения $(-\infty;\ +\infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$f(-x) = \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x} \text{ и } f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

Функция имеет период 2π. Учитывая это, проведем ее исследование и построим график только в пределах одного периода, например на промежутке $[0;\ 2\pi]$. Затем, пользуясь периодичностью функции, продолжим график на всю область определения.

3. Из уравнения $\dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x} = 0$ находим, что кривая пересекает ось абсцисс при $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$. С осью ординат кривая пересекается в начале координат.

4. Находим производную:

$$y' = \frac{(2 + \sin x) \cdot 2 \sin x \cos x - \sin x^2 \cos x}{\left(2 + \sin x\right)^2} = \frac{\sin x \cos x\,(4 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2}.$$

Из уравнения $\dfrac{\sin x \cos x\,(4 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} = 0$ следует, что $\sin x \cos x = 0$ (так как $4 + \sin x \neq 0$). Последнее равенство в пределах промежутка $[0;\ 2\pi]$ имеет место при $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$. Других критических точек нет.

5. Найденные точки делят промежуток $[0;\ 2\pi]$ на интервалы $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$. Результаты исследования знака производной в этих интервалах и значения функции в точках экстремума сведем в таблицу:

x	0	$\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$	π	$\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y	$y_{\min} = 0$	$\nearrow$	$y_{\max} = \frac{1}{3}$	$\searrow$	$y_{\min} = 0$	$\nearrow$	$y_{\max} = 1$	$\searrow$	$y_{\min} = 0$

6. Построим график (рис. 22).

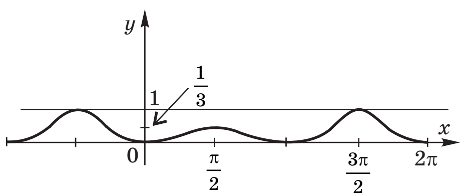


Рис. 22

Ответы

10. Возрастает на промежутках $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ +\infty)$, убывает на промежутке $(-1;\ 2)$. **15.** *Решение*. Так как производная $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$ положительна в любой точке числовой оси, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$. **16.** Убывает на $(-\infty;\ +\infty)$. **17.** Возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и на $(1;\ +\infty)$, убывает на $(-1;\ 1)$. **18.** Убывает на $(-\infty;\ -1)$ и на $(1;\ +\infty)$, возрастает на $(-1;\ 1)$. **19.** Возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и на $(2;\ +\infty)$, убывает на $(-1;\ 2)$. **20.** Возрастает на $(-\infty;\ -3)$ и на $(5;\ +\infty)$, убывает на $(-3;\ 5)$. **21.** Функция возрастает на всей области определения $(0;\ +\infty)$. **22.** Возрастает на $(0;\ 1)$, убывает на $(1;\ 2)$. **23.** Возрастает на промежутках

$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, убывает на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. **24.** Возрастает на $(0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$. **25.** Возрастает на $(1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1)$. **26.** Возрастает на $(-\infty; +\infty)$. **27.** Возрастает на $(-\infty; +\infty)$. **28.** Возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 0)$ и на $(0; 1)$. **36.** $y_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$.

37. $y_{\min} = f(1) = -\frac{9}{2}$. **38.** $y_{\max} = f(-3) = 10$. **39.** $y_{\max} = f\left(-\sqrt{2}\right) = 1 + 4\sqrt{2}$; $y_{\min} = f\left(\sqrt{2}\right) = 1 - 4\sqrt{2}$. **40.** $y_{\max} = f(-3) = 9$; $y_{\min} = f(1) = -\frac{5}{3}$.

41. $y_{\max} = f(0) = 2$; $y_{\min} = f(-1) = \frac{17}{12}$; $y_{\min} = f(3) = -\frac{37}{4}$.

42. $y_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$. **43.** $y_{\max} = f(1) = 3$; $y_{\min} = f(2) = 0$.

44. $y_{\min} = f\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$. **45.** $y_{\min} = f(0) = 2$. **46.** *Решение*. Пусть $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0; тогда $f'(x_0) = 0$. Если в точке x_0 производная также имеет экстремум (например, максимум), то для всех значений $x \neq x_0$, достаточно близких к x_0, получим $f'(x) < f'(x_0) = 0$. Следовательно, в окрестности x_0 функция $f(x)$ убывает, а это противоречит допущению. Таким образом, точка экстремума функции не может одновременно быть и точкой экстремума ее производной. **51.** $m = f(2) = -1$; $M = f(0) = 3$. **52.** $m = f(3) = -1$; $M = f(1) = 3$. **53.** $m = f(2) = 4$; $M = f(5) = 67$. **54.** $m = f(-1) = 0$; $M = f(-2) = 17$. **55.** $m = f(1) = -1$; $M = f(e) = 0$.

56. $m = f(0) = -1$; $M = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 372.851.2
ББК 74.262.21
Л63

Общая редакция серии «Математика» *В.Т. Лисичкин*

Лисичкин В.

Л63 Исследование функций с помощью производной / В. Лисичкин. – М. : Чистые пруды, 2005. – 32 с. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика»).

ISBN 5-9667-0054-0

Данная брошюра написана в соответствии с действующей школьной программой. Пособие может быть использовано для самостоятельного изучения, а также при подготовке к выпускному экзамену в традиционной форме, ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы. Краткие теоретические сведения сопровождаются подробными решениями задач. Упражнения для самостоятельного решения снабжены ответами или указаниями к решению.

УДК 372.851.2
ББК 74.262.21

Учебное издание

ЛИСИЧКИН Виктор

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Редактор *Г.П. Хозяинова*
Корректор *Л.А. Громова*
Компьютерная верстка *С.В. Сухарев*

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19078 от 08.12.2004 г.

Подписано в печать 05.05.2005.

Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Печ. л. 2,0.
Тираж экз. Заказ №
ООО «Чистые пруды», ул. Киевская, д. 24., Москва, 121165
http://www.1september.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в Раменской типографии
Сафоновский пр., д. 1, г. Раменское, МО, 140100
Тел. 377-0783. E-mail: ramtip@mail.ru

ISBN 5-9667-0054-0

© ООО «Чистые пруды», 2005